

## Corrigé des exercices du livre p 108

### 52 p 108

(a). Pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1} \\ &= \frac{3^n \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}{3^n \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

(b). Pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{10^n - 1}{10^n + 1} \\ &= \frac{10^n \left[ 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n \right]}{10^n \left[ 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n \right]} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n} \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$  donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

### 53 p 108

① Montrons par récurrence que pour tout  $n \geq 0$ ,  $1 \leq u_n \leq 2$ . *Initialisation* :  $u_0 = \frac{3}{2}$  appartient à  $[1; 2]$ .

*Hypothèse de récurrence* : Supposons que  $1 \leq u_n \leq 2$ .

Soit la fonction polynôme  $P(x) = x^2 - 2x + 2$ . On a  $P'(x) = 2x - 2$ , ainsi  $P'(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 1$ . Donc  $P$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ . On a donc :

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_n \leq 2 \\ P(1) &\leq P(u_n) \leq P(2) \\ 1 &\leq u_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

*Conclusion* : Pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq 2$ .

② (a). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_n - 2)(u_n - 1) &= u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \\ &= u_{n+1} - u_n \end{aligned}$$

(b). Comme  $1 \leq u_n \leq 2$  alors  $u_n - 2 \leq 0$  et  $u_n - 1 \geq 0$  d'où :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.

③  $(u_n)$  est monotone et bornée donc elle est convergente.

### 54 p 108

① Montrons par récurrence que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . *Initialisation* : Pour  $n = 1$ , l'inégalité est vraie.

*Hypothèse de récurrence* :

Supposons que  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} &= \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n+1} \quad (\text{par hypothèse}) \end{aligned}$$

On a  $n \geq 1$  donc  $n+1 \geq 2$  et :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

*Conclusion* : Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

② D'après la question précédente :

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leq 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

(somme des termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ )

$$u_n \leq 1 + 2 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

$$\leq 1 + 2$$

$$\leq 3$$

③  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$  est positif donc  $(u_n)$  est croissante. Elle est aussi majorée d'après la question précédente, donc elle est convergente.

**55 p 108**

① (a). En appliquant la définition de  $u_n$  au rang  $n+1$ , on obtient :

$$(n+1)^2 u_{n+1}^2 - n^2 u_n^2 = n+1$$

Pour tout  $n > 1$ ,

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 u_{n+1}^2 - n^2 u_n^2$$

$$= n+1$$

(b).

$$v_n - v_1 = v_n - v_{n-1} + v_{n-1} - v_{n-2} + \dots$$

$$\dots - v_2 + v_2 - v_1$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$$

$$= \frac{(n-1)(2+n)}{2}$$

(somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1)

$$v_n = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1$$

② D'après la question précédente, pour  $n > 1$  :

$$u_n^2 = \frac{1}{n^2} v_n$$

$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2 + n - 2}{2n^2} + \frac{1}{n^2}}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n - 2}{2n^2} = \frac{1}{2}$  car la limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**56 p 108**

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \geq 0$ ,  $0 \leq u_n - l \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - l)$ .

*Initialisation* : Pour  $n=0$ , c'est vrai.

*Hypothèse de récurrence* : Supposons que pour un certain rang  $n \geq 0$ ,  $u_n - l \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - l)$ . Montrons alors que :

$$u_{n+1} - l \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (u_0 - l)$$

Par hypothèse on a :

$$0 \leq u_{n+1} - l \leq \frac{2}{3}(u_n - l)$$

$$\leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - l)$$

par hypothèse de récurrence donc :

$$0 \leq u_{n+1} - l \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (u_0 - l)$$

*Conclusion* : Pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_n - l \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - l)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - l) = 0$ . D'après le théorème des gendarmes,  $(u_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .