Corrigé des exercices du livre p 48

1 p 48

(a). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$

(b). $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -2x^4 = -\infty$

(c). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$

2 p 48

(a). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 7x^3 = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 7x^3 = -\infty$

(b). $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 8x^4 = +\infty$

(c). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$

3 p 48

(a). $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$$

(b). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\overbrace{x^2+3}^{\to 4}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\overbrace{x^2+3}^{\to 4}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$$

(c). $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{\overbrace{2x+3}^{\to 7}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{\overbrace{2x+3}^{\to 7}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^-}} = -\infty$$

4 p 48

(a). $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x} = 5$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{\overbrace{5x+1}^{\to -4}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{\overbrace{5x+1}^{\to -4}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}} = +\infty$$

(b). $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{\overbrace{x+2}^{\to 5}}{\underbrace{(x-3)^2}_{\to 0^+}} = +\infty$$

(c). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

5 p 48

(a). $\lim_{x\to+\infty} 3x-5 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{x+2}_{\to+\infty}} = 0$ donc :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 3x-5 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{x+2}_{\to-\infty}} = 0$ donc :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-2} 3x-5 = -11$ et $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{1}{\underbrace{x+2}_{\to 0^+}} = +\infty$ donc :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2} 3x-5=-11$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{1}{\underbrace{x+2}_{\to 0^-}} = -\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

(b). $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2 - \dfrac{1}{\underbrace{x^2}_{\to +\infty}} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2 - \dfrac{1}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}} = -\infty$

(c). $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2+3x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\underbrace{1+x}_{\to +\infty}} = 0$ donc :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+3x = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{\underbrace{1+x}_{\to -\infty}} = 0$ donc :

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1} x^2+3x = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{1}{\underbrace{1+x}_{\to 0^+}} = +\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1} x^2+3x = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{1}{\underbrace{1+x}_{\to 0^-}} = -\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

6 p 48

(a). $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\overbrace{2x^2}^{\to 2}}{\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^+}\underbrace{(2-x)}_{\to 1}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\overbrace{2x^2}^{\to 2}}{\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^-}\underbrace{(2-x)}_{\to 1}}_{\to 0^-}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\overbrace{2x^2}^{\to 8}}{\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{\to 1}\underbrace{(2-x)}_{\to 0^-}}_{\to 0^-}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{\overbrace{2x^2}^{\to 8}}{\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{\to 1}\underbrace{(2-x)}_{\to 0^+}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

(b). (Sans justification)

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$

(c). (Sans justification)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

9 p 48

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{5x-1}^{\to 4}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0^+}} = +\infty$$

Pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3$$

$$5x-1 > 1000(x-1)^2$$

$$\text{car } (x-1)^2 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

$$5x-1 > 1000x^2 - 2000x + 1000$$

$$-1000x^2 + 2005x - 1001 > 0$$

$\Delta = 2005^2 - 4\times(-1000)\times(-1001) = 16025 = (5\sqrt{641})^2$

Donc $-1000x^2+2005x-1001 > 0$ dès que

$$x \in \left]1,0025 - \frac{\sqrt{641}}{400}\ ;1,0025 + \frac{\sqrt{641}}{400}\right[$$

Donc $\alpha = -0,0025 + \dfrac{\sqrt{641}}{400} \approx 0,06$ convient

10 p 48

f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ donc :

$$\lim_{x\to 5} f(x) = f(5) = 4$$

Pour tout $x \in]3\,;7[$, $x-3>0$ et ainsi :

$$3,95 < \frac{x+3}{x-3} < 4,05$$
$$3,95(x-3) < x+3 < 4,05(x-3)$$
$$3,95x - 11,85 < x+3 < 4,05x - 12,15$$

$$\begin{array}{rcl} 2,95x < 14,85 & \text{et} & 15,15 < 3,05x \\ x < \dfrac{14,85}{2,95} & \text{et} & \dfrac{15,15}{3,05} < x \\ x < 5,033 & \text{et} & 4,967 < x \end{array}$$

Donc $I =]4,967\,;5,033[$ convient.

12 p 48

$$\lim_{x\to\pm+\infty} \frac{-2x}{x+1} = \lim_{x\to\pm+\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ d'équation $y=-2$.
$f(x)-(-2) = \dfrac{-2x}{x+1} + 2 = \dfrac{2}{x+1}$.
Si $x>-1$, $f(x)-(-2)>0$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous.

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{\overbrace{-2x}^{\to 2}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{\overbrace{-2x}^{\to 2}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}} = -\infty$$

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en -1 d'équation $x=-1$.

14 p 48

(a). $$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{\sqrt{x}-1}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{\sqrt{x}-1}_{\to 0^-}} = -\infty$$

(b). $$\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{2x-3}_{\to+\infty})(\underbrace{5-\sqrt{x}}_{\to-\infty}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} (\underbrace{2x-3}_{\to 0})(\underbrace{5-\sqrt{x}}_{\to 5-\sqrt{\frac{3}{2}}}) = 0$$

15 p 48

(a). $$\lim_{x\to0^+} \underbrace{\cos x}_{\to 1} + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \underbrace{\cos x}_{\to 1} + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to-\infty} = -\infty$$

$\cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$ donc $f(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
(b). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi+1$

$$-1 \leqslant \sin x$$
$$2x-1 \leqslant 2x + \sin x$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$